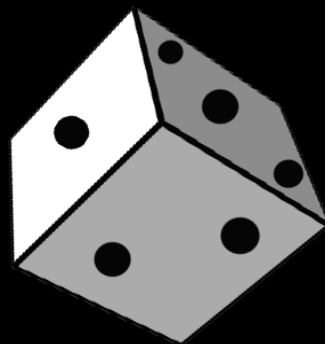


# บทที่ 3

## ตัวแปรสุ่ม และการคาดคะเนทางคณิตศาสตร์



# ตัวแปรสุ่ม

ฟังก์ชันหรือลักษณะต่าง ๆ ที่นิยามขึ้นจากผลการทดลองสุ่มใด ๆ  
โดยปกติแล้ว ตัวแปรสุ่มจะปรากฏเป็นค่าเชิงตัวเลขที่ได้จากจุดตัวอย่างจุดต่าง ๆ ใน  
แซมเปิลสเปซ ของการทดลอง ตัวแปรสุ่มจะแทนด้วยอักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่  
และใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวเล็กแทนค่าของตัวแปรสุ่ม

## ตัวอย่าง การตรวจคุณภาพสินค้าชนิดหนึ่ง

ให้  $y$  เป็นตัวแปรสุ่มแทนคุณภาพสินค้าที่ตรวจพบ



$y = \{ \text{ดี} , \text{เสีย} \}$



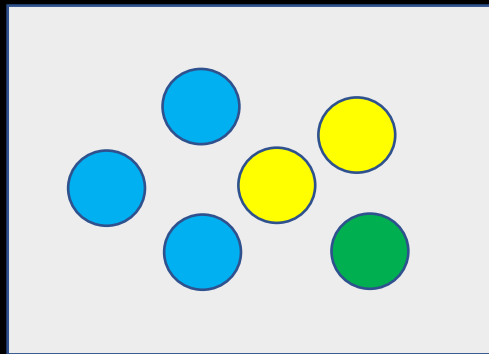
$y = \{0,1\}$  เมื่อ 0 แทนสินค้าดี และ 1 แทนสินค้าเสีย

ตัวแปรสุ่ม



ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 1 ลูก จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก  
เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มแทน **สีของลูกบอลที่สุ่มได้**



สุ่ม 1 ลูก



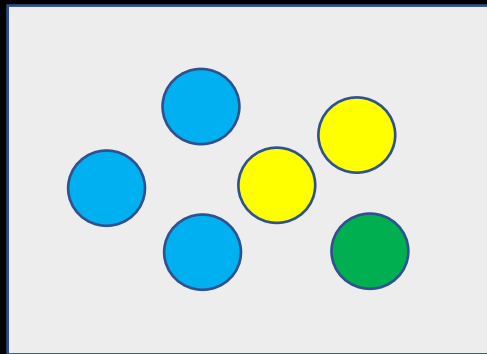
$$X = \{ \text{ฟ้า, เหลือง, เขียว} \}$$

ตัวแปรสุ่ม

ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก  
เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

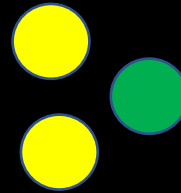
ตัวแปรสุ่ม

ให้  $Y$  เป็นตัวแปรสุ่มแทน จำนวนบอลสีฟ้าที่ได้



$$Y = \{0\}$$

สุ่ม 3 ลูก

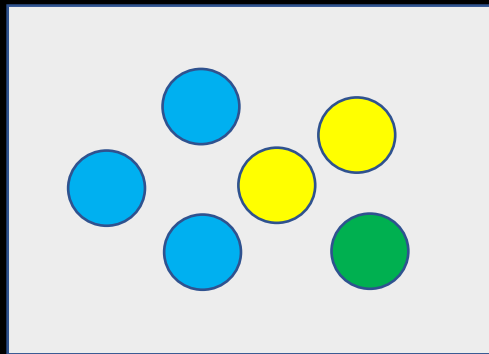


$$\text{ฟ้า} = 0$$

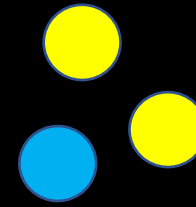
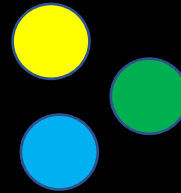
ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก  
เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ตัวแปรสุ่ม

ให้  $Y$  เป็นตัวแปรสุ่มแทน จำนวนบอลสีฟ้าที่ได้



สุ่ม 3 ลูก



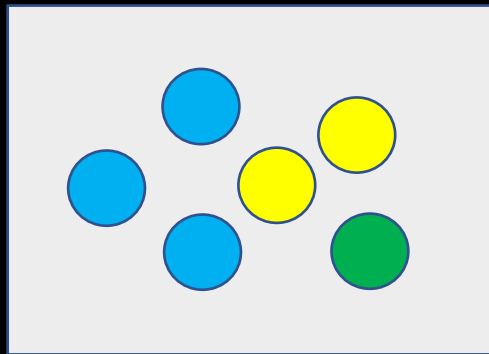
ฟ้า = 1

$$Y = \{0, 1\}$$

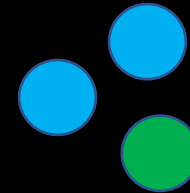
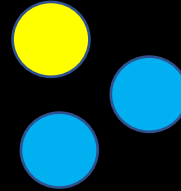
ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก  
เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ตัวแปรสุ่ม

ให้  $Y$  เป็นตัวแปรสุ่มแทน จำนวนบอลสีฟ้าที่ได้



สุ่ม 3 ลูก



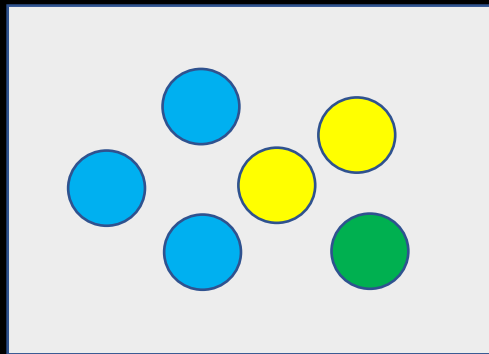
ฟ้า = 2

$$Y = \{0, 1, 2\}$$

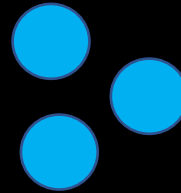
ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก  
เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ตัวแปรสุ่ม

ให้  $Y$  เป็นตัวแปรสุ่มแทน จำนวนบอลสีฟ้าที่ได้



สุ่ม 3 ลูก



ฟ้า = 3

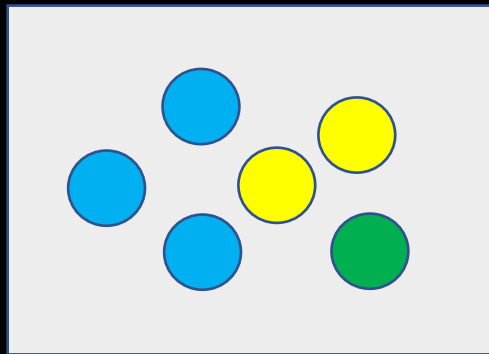
$Y = \{0, 1, 2, 3\}$



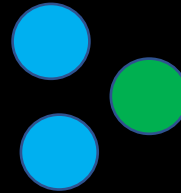
ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก  
เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ตัวแปรสุ่ม

ให้  $x$  เป็นตัวแปรสุ่มแทน **จำนวนบอลสีเหลืองที่ได้**



สุ่ม 3 ลูก



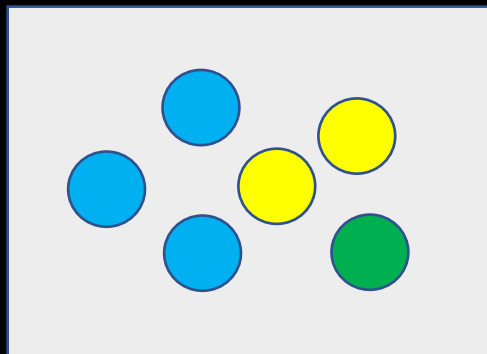
เหลือง = 0

$x = \{0\}$

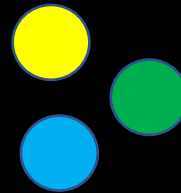
ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก  
เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ตัวแปรสุ่ม

ให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มแทน **จำนวนบอลสีเหลืองที่ได้**



สุ่ม 3 ลูก



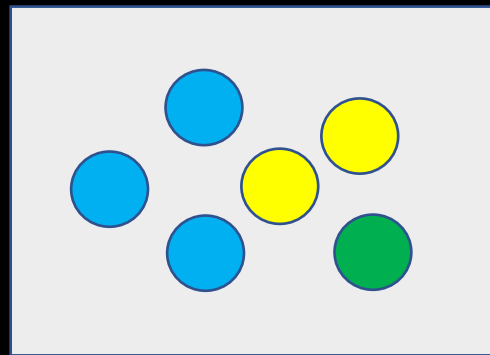
เหลือง = 1

$X = \{0, 1\}$

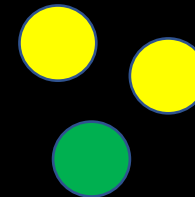
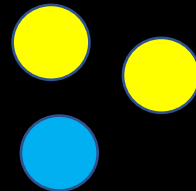
ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก  
เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ตัวแปรสุ่ม

ให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มแทน **จำนวนบอลสีเหลืองที่ได้**



สุ่ม 3 ลูก



เหลือง = 2

$$X = \{0, 1, 2\}$$

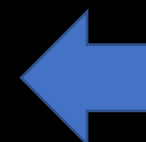
## ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

ตัวอย่าง โยนลูกเต๋า 1 ลูก

ให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มแทน **แต้มที่ได้**



$$X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$



ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

$X$	1	2	3	4	5	6
$f(X)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

การทดลองสุ่ม



ตัวแปรสุ่ม



ฟังก์ชันการแจกแจง  
ของตัวแปรสุ่ม



ตรวจสอบสมบัติ

โยนลูกเต๋า 1 ลูก

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

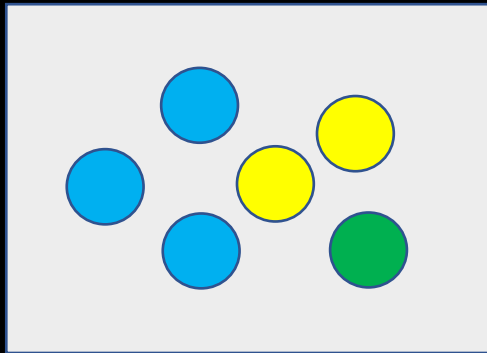
$x$	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

1.  $f(x_i) \geq 0$  ทุก ๆ ค่าของ  $i$
2.  $\sum f(x_i) = 1$

## ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 1 ลูก จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก สีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มแทน **สีของลูกบอลที่สุ่มได้**

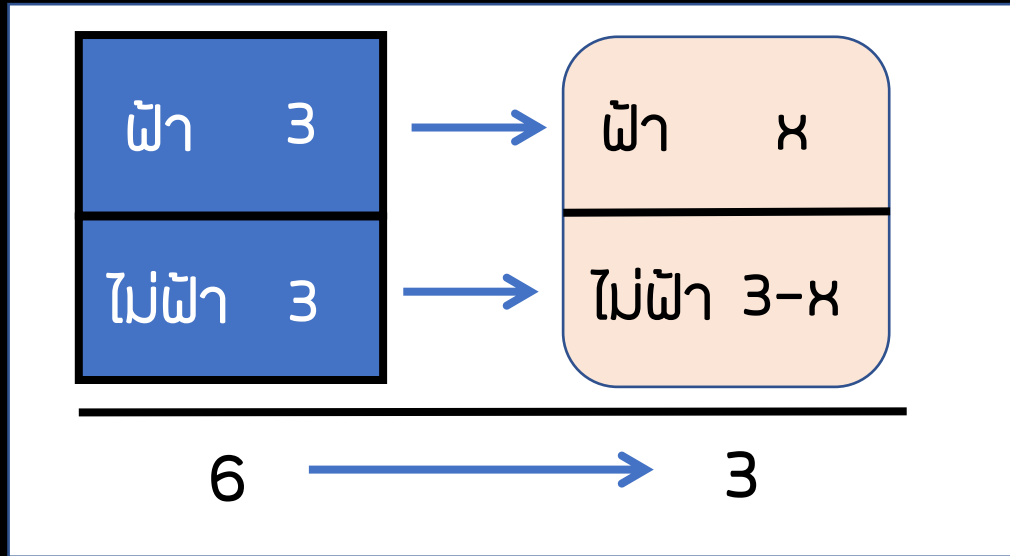


$X = \{ \text{ฟ้า, เหลือง, เขียว} \}$

$X$	ฟ้า	เหลือง	เขียว
$f(X)$	$3/6$	$2/6$	$1/6$

- $f(x_i) \geq 0$  ทุก ๆ ค่าของ  $i$
- $\sum f(x_i) = 1$

ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอลฟ้า 3 ลูก แลือง 2 ลูก เขียว 1 ลูก



ให้  $x$  เป็นตัวแปรสุ่มแทนบอลสีฟ้าที่ได้

$$X = \{ 0, 1, 2, 3 \}$$

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

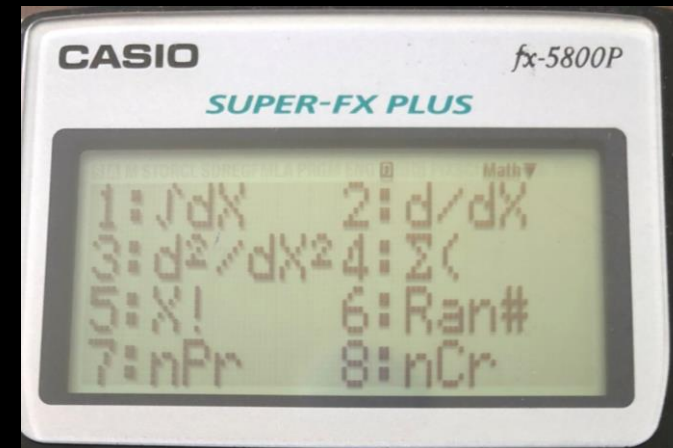
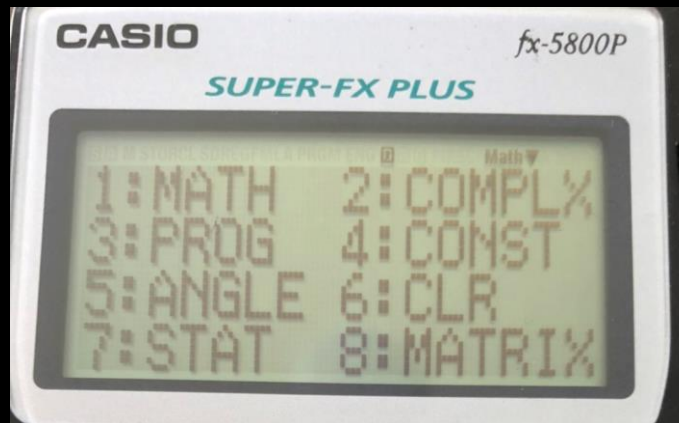
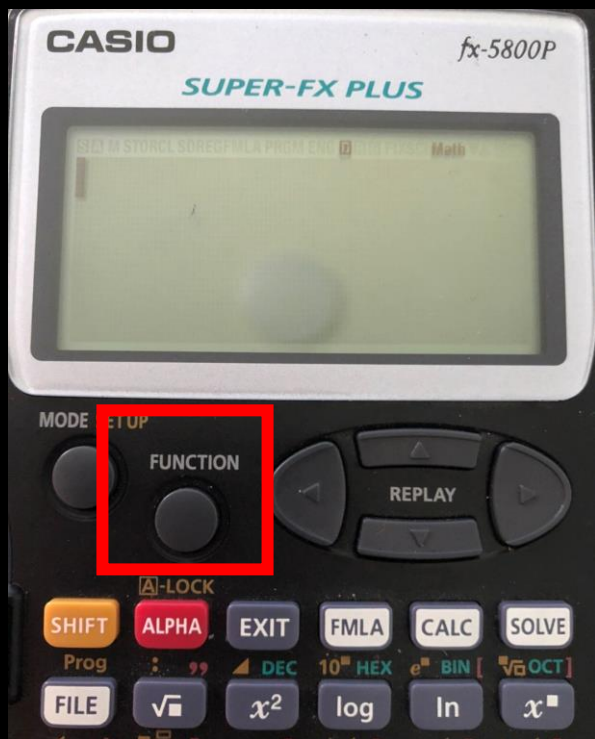
$x$	0	1	2	3
$f(x)$				

$$f(x) = \frac{\begin{matrix} \text{ฟ้า} & \text{ไม่ฟ้า} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 3-x \end{bmatrix} \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

การหาค่า  $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. กด 1

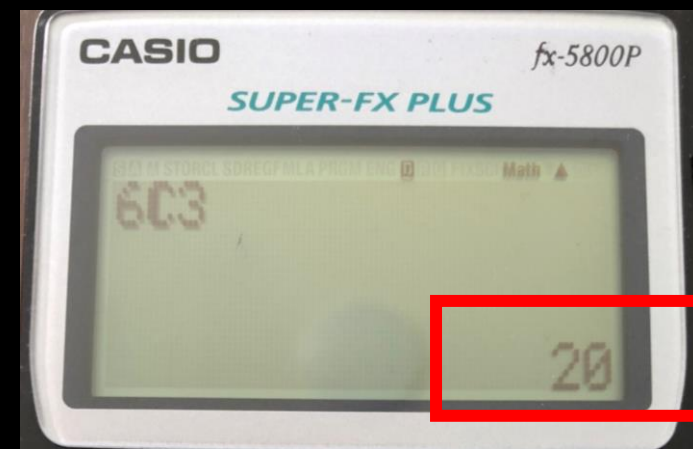
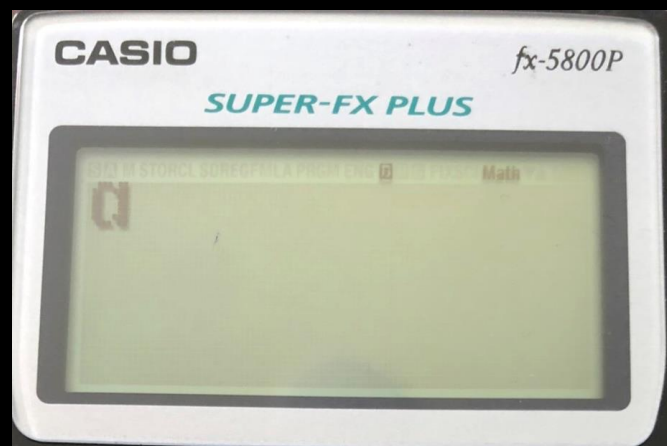
3. กด 8



หน้าจอขึ้น C

4. พิมพ์ 6 C 3 กด EXE

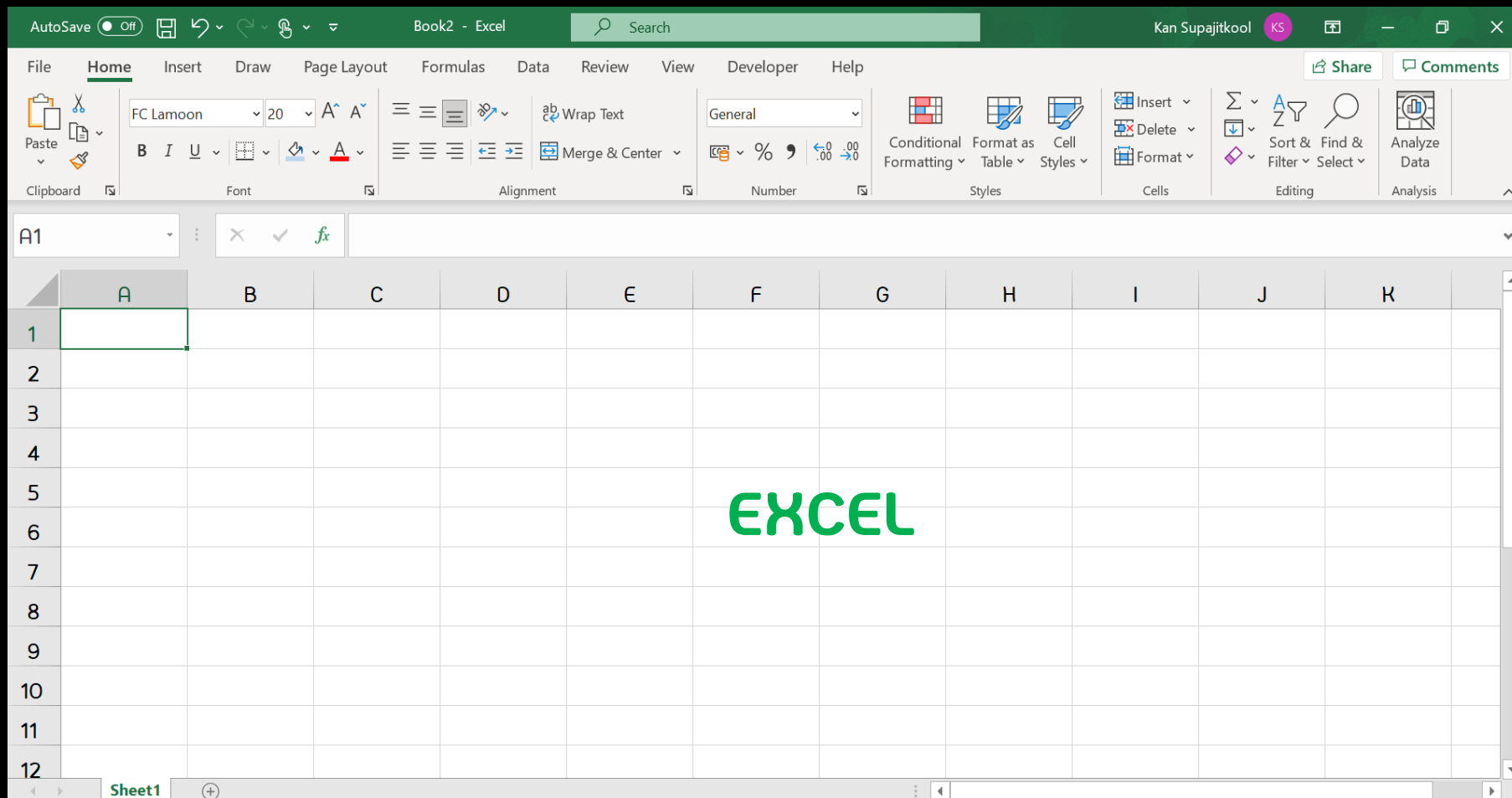
1. กด function



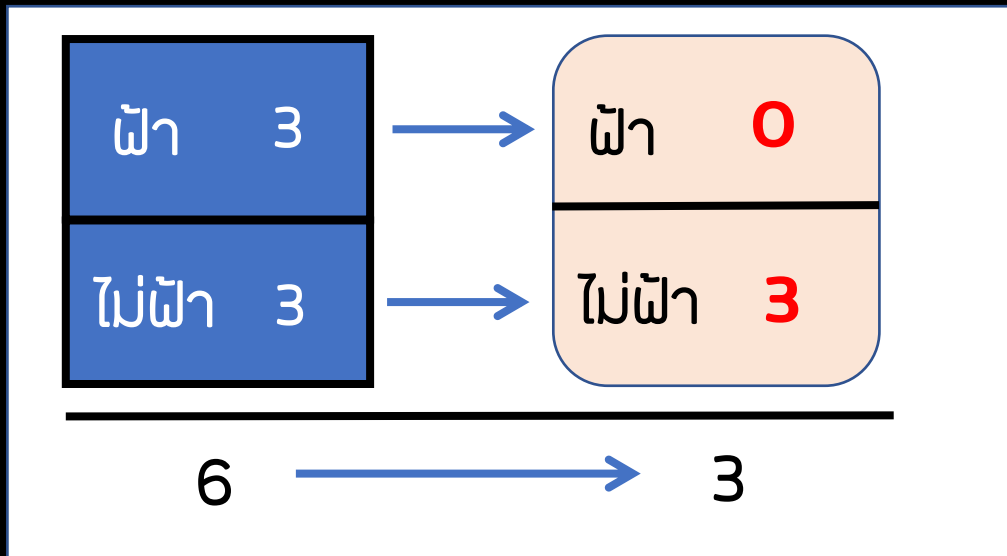




CODE ลู



ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอลฟ้า 3 ลูก แลือง 2 ลูก เขียว 1 ลูก



ให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มแทนบอลสีฟ้าที่ได้

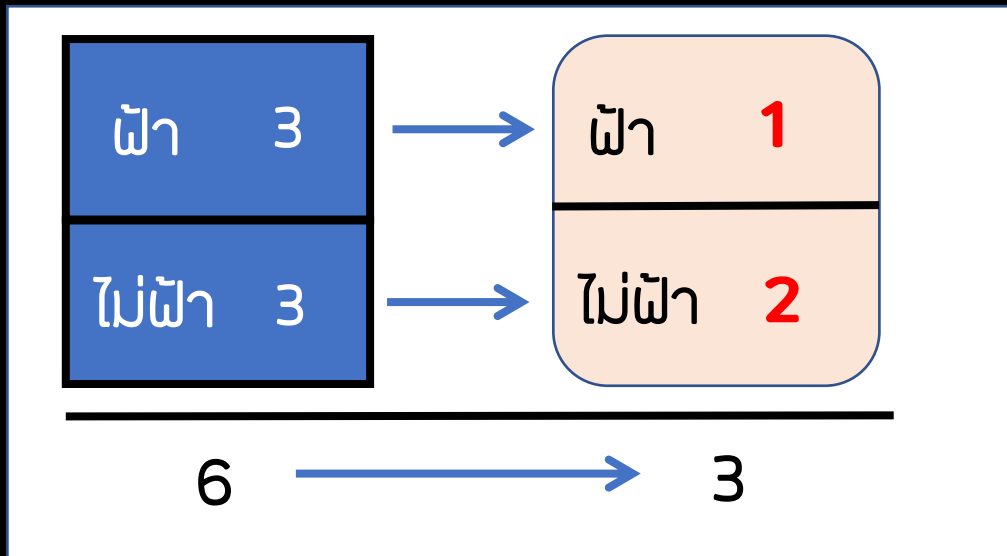
$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$f(x) = \frac{\begin{matrix} \text{ฟ้า} & \text{ไม่ฟ้า} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}} = 1/20$$

ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	1/20			

ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอลฟ้า 3 ลูก แลือง 2 ลูก เขียว 1 ลูก



ให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มแทนบอลสีฟ้าที่ได้

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$f(x) = \frac{\begin{matrix} \text{ฟ้า} & \text{ไม่ฟ้า} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}} = 9/20$$

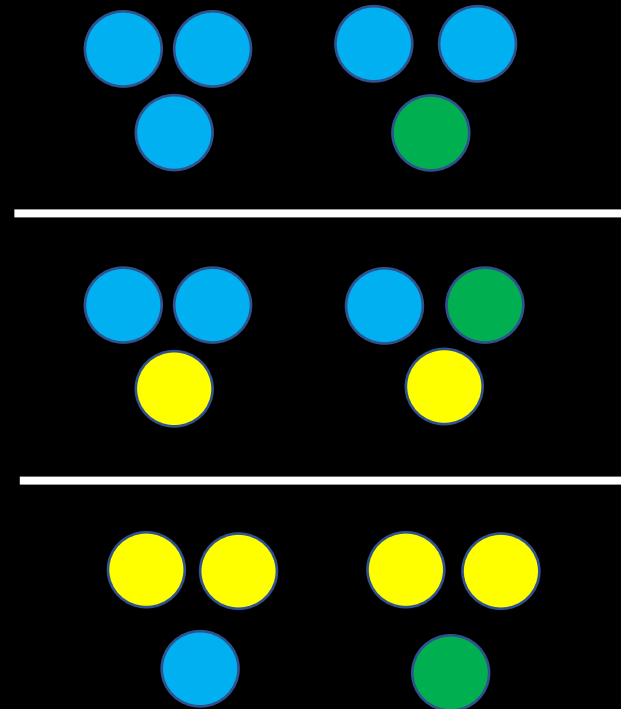
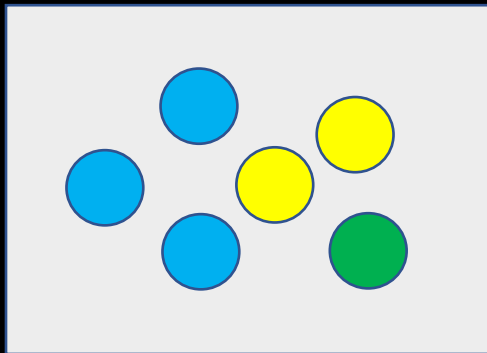
ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

$X$	0	1	2	3
$f(x)$	1/20	9/20	9/20	1/20

# ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

ตัวอย่าง สุ่มหยิบบอล 3 ลูกพร้อมกัน จากกล่องที่มีบอล 6 ลูก เป็นสีฟ้า 3 ลูก สีเหลือง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก

ให้  $x$  เป็นตัวแปรสุ่มแทน **จำนวนบอลสีเหลืองที่ได้**  $x = \{0, 1, 2\}$



$x$	0	1	2
$f(x)$	$4/20$	$12/20$	$4/20$

$$f(x) = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3-x \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

ตัวอย่าง การทดลองสุ่มโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,5), (6,6) \} \quad nS = 36$$

กำหนดให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มแทนผลลัพธ์ที่ได้จากการบวกแต้มบนลูกเต๋าทิ้งสอง



$X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
$F(x)$	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	36/36

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม

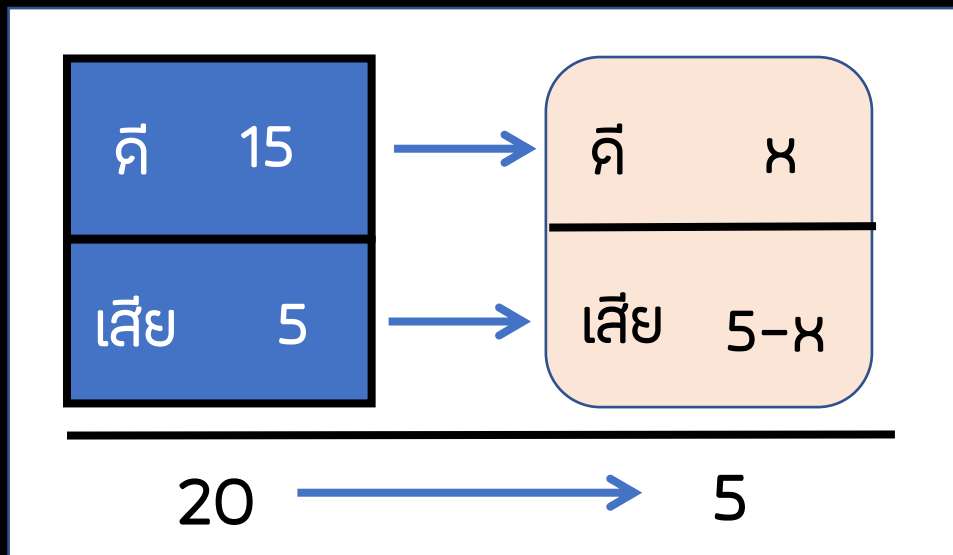
ฟังก์ชันความน่าจะเป็น

ตัวอย่าง    กล่องบรรจุสินค้า 20 ชิ้น เป็นสินค้าคุณภาพดี 15 ชิ้น และเป็นสินค้าเสีย 5 ชิ้น ทำการสุ่ม  
ตัวอย่างสินค้าในกล่องจำนวน 5 ชิ้น ให้  $x$  เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนสินค้าคุณภาพดีที่สุ่มได้ จงหา  
ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของ  $x$

กำหนดให้  $x$  เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนสินค้าดีที่สุ่มได้ ;

$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$f(x) = \frac{\begin{bmatrix} 15 \\ x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5-x \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 20 \\ 5 \end{bmatrix}}$$



$x$	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1/15504	75/15504	1050/15504	4550/15504	6825/15504	3003/15504

## ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม (Expected Value)

$$E[X] = \sum x f(x)$$

## ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม (Variance Value)

$$\text{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - \mu^2 = E[X^2] - (E[X])^2$$

ตัวอย่าง งบค่าคาดหวัง จากแต้มที่ได้จากการโยนลูกเต๋า 1 ลูก

กำหนดให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มของแต้มที่ได้จากการโยนลูกเต๋า 1 ลูก

$$X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

ค่าของตัวแปรสุ่ม $X$	1	2	3	4	5	6
ความน่าจะเป็น $f(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E[X] = (1)(1/6) + (2)(1/6) + (3)(1/6) + (4)(1/6) + (5)(1/6) + (6)(1/6) = 21/6 = 3.5$$



ตัวอย่างเพิ่มเติม จากตารางแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม  $X$

$X$	-2	-1	0	1	3	5
$f(x)$	0.1	0.2	0.1	0.3	0.1	0.2

$$1. E[X] = (-2)(0.1) + (-1)(0.2) + (0)(0.1) + (1)(0.3) + (3)(0.1) + (5)(0.2) = 1.2$$

$$2. E[X^2] = (-2)^2(0.1) + (-1)^2(0.2) + (0)^2(0.1) + (1)^2(0.3) + (3)^2(0.1) + (5)^2(0.2) = 6.8$$

$$3. \text{var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 6.8 - (1.2)^2 = 5.36$$

## สมบัติของค่าคาดหวัง $E[X]$ ของตัวแปรสุ่ม

1.  $E[g(x)] = \sum g(x)f(x)$  เมื่อ  $x$  เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

2. ถ้า  $C$  เป็นค่าคงที่  $E[C] = C$  เช่น  $E[5] = 5$

3. ถ้า  $C$  เป็นค่าคงที่  $E[C u(x)] = C E[u(x)]$  เช่น  $E[5x] = 5 E[x]$

4.  $E[u(x) \pm v(x)] = E[u(x)] \pm E[v(x)]$

เช่น  $E[5x^2 + 2x + 1] = E[5x^2] + E[2x] + E[1] = 5E[x^2] + 2E[x] + 1$

ตัวอย่างเพิ่มเติม จากตารางแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม  $X$

$X$	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	0.1	0.3	0.2	0.3	0.1

1. จงหา  $E[2X^2+3X-6]$

2.  $\text{var}[X-3]$

$$E[X] = (-3)(0.1) + (-1)(0.3) + (0)(0.2) + (1)(0.3) + (2)(0.1) = -0.1$$

$$E[X^2] = (-3)^2(0.1) + (-1)^2(0.3) + (0)^2(0.2) + (1)^2(0.3) + (2)^2(0.1) = 1.9$$

$$1. E[2X^2+3X-6] = E[2X^2] + E[3X] - E[6] = 2E[X^2] + 3E[X] - 6 = 2(1.9) + 3(-0.1) - 6 = -2.5$$

$$2. \text{var}[X-3] = E[(X-3)^2] - (E[X-3])^2 = E[X^2-6X+9] - (E[X]-3)^2$$

$$= E[X^2] - 6E[X] + 9 - (E[X]-3)^2 = 1.9 - 6(-0.1) + 9 - (-0.1-3)^2 = 11.5 - 9.61 = 1.89$$

ตัวอย่างเพิ่มเติม จากตารางแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม  $X$

$X$	-25	-10	0	22	35
$F(X)$	0.15	0.40	0.68	0.86	1.00
$f(X)$	0.15	0.25	0.28	0.18	0.14

1. จงหา  $E[3X^2+5X-1]$

2.  $\text{var}[2X-1]$

$$E[X] = (-25)(0.15) + (-10)(0.25) + (0)(0.28) + (22)(0.18) + (35)(0.14) = 2.61$$

$$E[X^2] = (-25)^2(0.15) + (-10)^2(0.25) + (0)^2(0.28) + (22)^2(0.18) + (35)^2(0.14) = 377.4$$

$$1. E[3X^2+5X-1] = E[3X^2] + E[5X] - E[1] = 3E[X^2] + 5E[X] - 1 = 1144.16$$

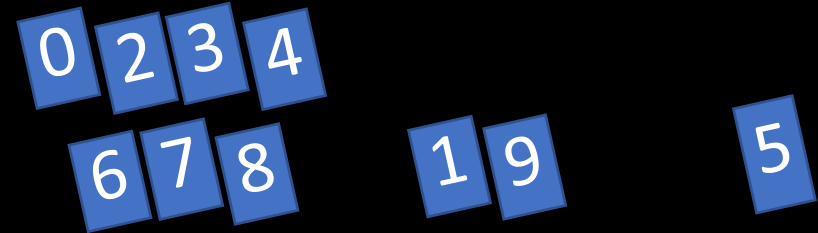
$$2. \text{var}[2X-1] = E[(2X-1)^2] - (E[2X-1])^2 = E[4X^2-4X+1] - (2E[X]-1)^2$$

$$= 4E[X^2] - 4E[X] + 1 - (2E[X]-1)^2 = 1500.16 - 17.81 = 1482.35$$

ตัวอย่างเพิ่มเติม นายบุญญชต้องการทำเกมสให้เพื่อนเล่นด้วยการเสี่ยงดวง โดยเขาทำสลากขึ้นมา 10 ใบ เป็นเลข 0-9 การเล่นคือให้เพื่อนสุ่มหยิบสลากขึ้นมา 1 ใบ ถ้าได้เลข 5 เพื่อนได้เงิน 20 บาท ถ้าได้เลข 1 กับเลข 9 ได้เงิน 10 บาท นอกนั้นไม่ได้เงิน ถ้าให้เกมสนี้ไม่เสียเปรียบ เขาควรเก็บค่าเล่นเกมสให้เพื่อนครั้งละ กี่บาท

กำหนดให้  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มแทนเงินรางวัล

$$X = \{ 0, 10, 20 \}$$



$X$	0	10	20
$f(X)$	7/10	2/10	1/10

$$E[X] = (0)(7/10) + (10)(2/10) + (20)(1/10) = 4$$

เงินรางวัลที่ต้องจ่ายโดยเฉลี่ยเท่ากับ 4 บาท ดังนั้นเขาควรเก็บค่าเล่นเกมสอย่างน้อยเกมสละ 4 บาท



# สลากกินแบ่งรัฐบาล

รางวัลที่ 1	ข้างเคียง	รางวัลที่ 2	รางวัลที่ 3	รางวัลที่ 4	รางวัลที่ 5	หน้า 3 ตัว	ท้าย 3 ตัว	2 ตัว	ไม่ถูก
6,000,000	100,000	200,000	80,000	40,000	20,000	4,000	4,000	2,000	0
<u>1</u> 1,000,000	<u>2</u> 1,000,000	<u>5</u> 1,000,000	<u>10</u> 1,000,000	<u>50</u> 1,000,000	<u>100</u> 1,000,000	<u>1,000</u> 1,000,000	<u>1,000</u> 1,000,000	<u>10,000</u> 1,000,000	<u>987,832</u> 1,000,000

$$\begin{aligned}
 E[X] &= (6,000,000 \times 0.000001) + (100,000 \times 0.000002) \\
 &+ (200,000 \times 0.000005) + (80,000 \times 0.00001) + (40,000 \times 0.00005) \\
 &+ (20,000 \times 0.0001) + (4,000 \times 0.0001) + (4,000 \times 0.0001) \\
 &+ (2,000 \times 0.001) \\
 &= 40
 \end{aligned}$$





QUIZ 3	ชื่อ-สกุล		รหัส		เลขที่	
--------	-----------	--	------	--	--------	--

กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม  $X$  มีการแจกแจงความน่าจะเป็นดังตาราง (10 คะแนน)

$X$	$-3X$	$-2Y$	$Y$	$4Z$	$6X$
$f(x)$		0.31	0.16	0.11	0.1X

$ZYX$  คือเลข 3 ตัวท้ายรหัสนิสิต เช่น 64361254 จะได้  $X=4$   $Y=5$   $Z=2$  เช่น  $-3X$  จะได้  $-34$  เป็นต้น  
กำหนดให้ใช้ทฤษฎีบท 2 ตำแหน่ง

1. จงหาค่าของ  $E[X]$  (2 คะแนน)

2. จงหาค่าของ  $E[X^2]$  (2 คะแนน)

3. จงหาค่าของ  $E[2X^2+17X-200]$  (3 คะแนน)

4. จงหาค่าของ  $\text{var} [(3X-11)]$  (3 คะแนน)